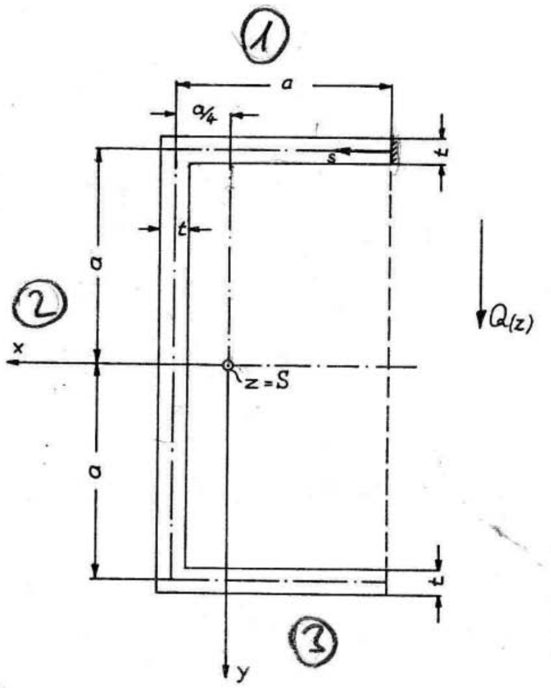
TM II SS10 Aufgabenblatt 6



Aufgabe 2

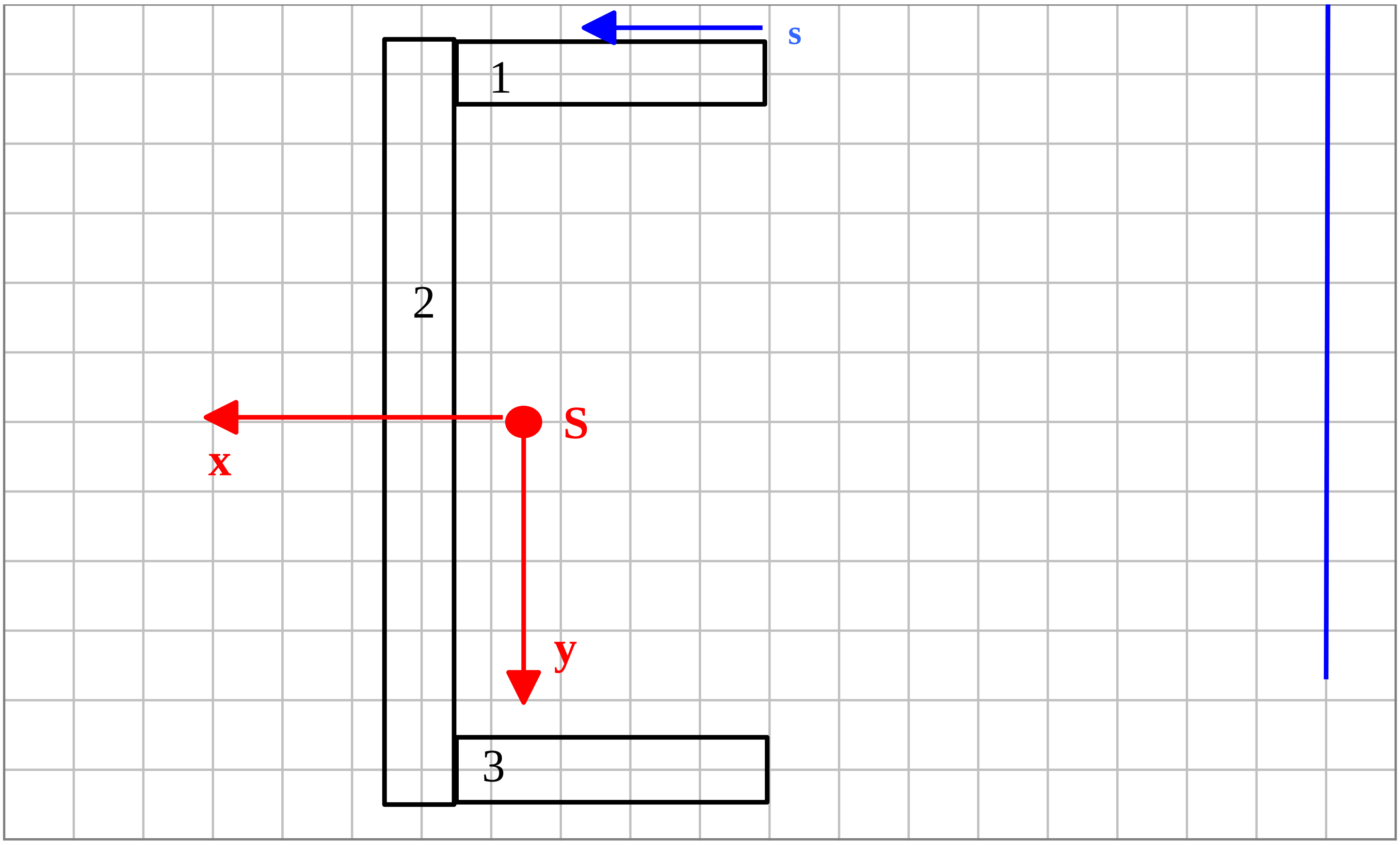
Ein statisch bestimmt gelagerter Träger besitzt das abgebildete dünnwandige (t«a) Querschnittsprofil. Er wird durch die Querkraft Q(z) beansprucht.

1. Man bestimme näherungsweise das Flächenträgheitsmoment I_x und den Verlauf des statischen Flächenmoments $H_x(s)$.
2. Berechnen Sie den Verlauf der über die Wandstärke gemittelten Schubspannung $\tau_{zs}(s,z)$ und skizzieren Sie diese entlang der Profol-Skellett-Linie.
3. Berechnen Sie bitte die Koordinaten x_T, y_T des Schubmittelpunkts.

Ergebnis: 1. $I_x=8/3\ a^3t$; $0\le s_1\le a$: $H_{x1}=ats_1$; $a\le s_2\le 3a$: $H_{x2}=t/2(4as_2-s_2^2-a^2)$;
$0\le s_3\le a$: $H_{x3}=at(4a-s_3)$;
2. $\tau_{zs1}=3/8Q(z)\ s_1/a^2t$; $\tau_{zs2}=3/8Q(z)\ (4as_2-s_2^2-a^2)/2a^3t$; $\tau_{zs3}=3/8Q(z)\ (4a-s_3)/a^2t$;
3. $x_T=5/8a$; $y_T=0$

► Maple Initialisierung

(1)



Flächenträgheitsmoment

Berechnung mit Rechteckflächen & Steinerverschiebung

(2)

$I_x := I_{x1} + I_{x3} + I_{x2}:$

$$I_x := 2\left(\frac{a\,t^3}{12} + a^2 \cdot a \cdot t\right) + \frac{t \cdot (2\,a)^3}{12} = \frac{1}{6}\,a\,t^3 + \frac{8}{3}\,a^3\,t$$

(3)

da t<<a wird der erste Term vernachlässigt: $I_x := \frac{8}{3}a^3\,t:$

statisches Flächenmoment S(s)

Berechnung mit Rechteckflächen in den Segmenten 3 -> 2 -> 1

$$S_x(s) = \int_{A_*} y \,\mathrm{d}A_* = \int_s^{smax} y \cdot t \cdot \mathrm{d}s = \triangle y_s \cdot A_* \qquad mit\ S_x(A_*) = -S_x(\mathcal{A}) \qquad wenn\ A_* + \mathcal{A} = A$$

$S_{x3} = \triangle y_s \cdot A_* = a \cdot ((4\,a - s) \cdot t)$

$S_{x2} = S_{x3} + \triangle y_s \cdot A_* = S_{x3} + \frac{y+a}{2} \cdot ((a-y) \cdot t) \qquad und \qquad y = s - 2\,a$

$S_{x1} = S_{x3} + S_{x2} + \triangle y_s \cdot A_* = S_{x3} + (-a) \cdot (s \cdot t)$

Flächenmomentfunktion für die 3 Bereiche:

$S := s \rightarrow piecewise\Big(s < a, \qquad a \cdot t \cdot s,$

$s < 3\,a, \qquad \frac{t}{2}\left(4\,a\cdot s - s^2 - a^2\right),$

$s \le 4\,a, \qquad a\cdot t\cdot\left(4\,a - s\right)\Big) :$

Schubspannungsverlauf

$$\tau := \frac{Q\cdot S(s)}{I_x\cdot t} = \frac{3}{8}\,\frac{Q\left(\begin{cases} a\,s\,t & s < a \\ \frac{1}{2}\,t\left(4\,a\,s - s^2 - a^2\right) & s < 3\,a \\ a\,(4\,a - s)\,t & s \le 4\,a \end{cases}\right)}{a^3\,t^2}$$

Werte an den Bereichsgrenzen, Vorgabe der Variablenwerte für Plot:

$a := 10 :$

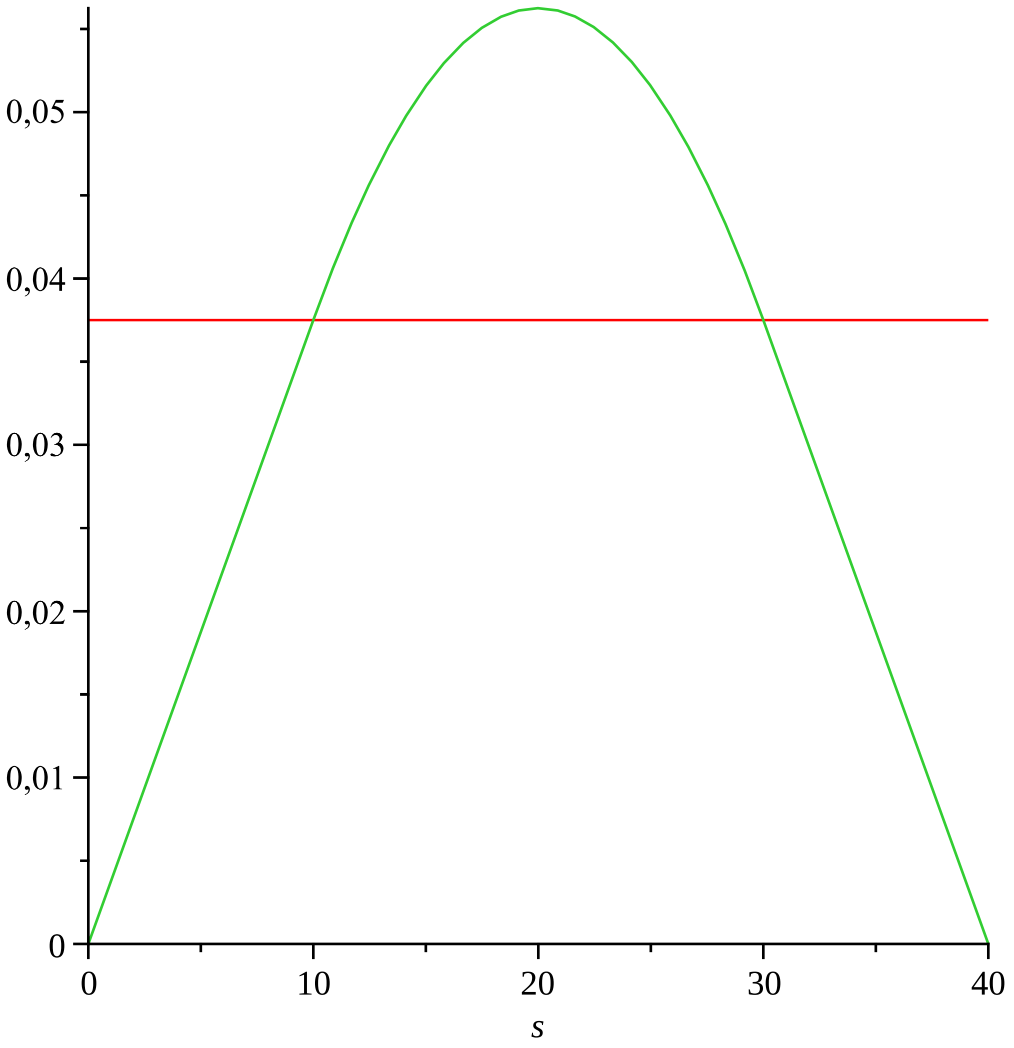
$t := 1 :$

$Q := 1 :$

$eval(\tau(4\,a))$

$$\frac{3}{8000}\begin{cases} 10\,s & s < 10 \\ 20\,s - \frac{1}{2}\,s^2 - 50 & s < 30 \\ 400 - 10\,s & s \le 40 \end{cases} \quad (40) \tag{4}$$

$plot\left(\left[\frac{3\cdot 10\cdot 10}{8000}, \tau(s)\right], s = 0\,..40\right)$

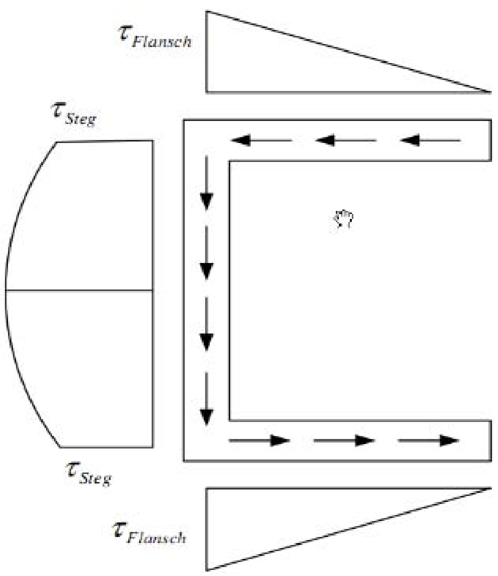


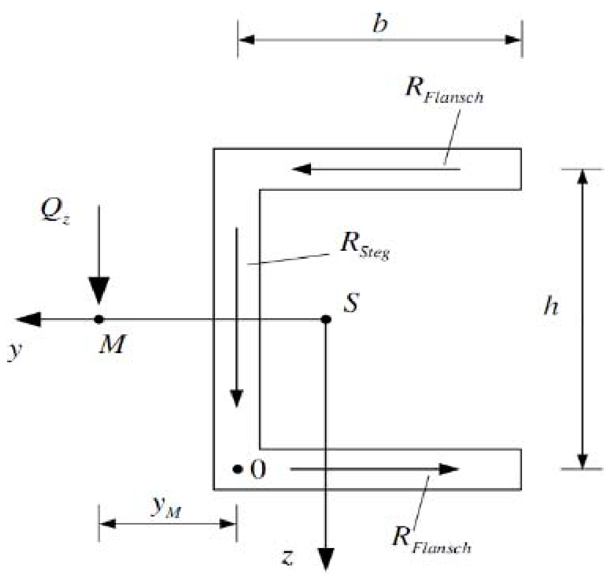
(5)

$unassign('Q','t','a')$

Schubmittelpunkt

Ansatz siehe Beiblatt Universität Siegen bez. Hibbeler TM2 S.561





Bildet man das Moment der Querkraft Q_z und das Moment der aufsummierten Schubspannungen τ um den Punkt 0 folgt mit $T_{Flansch} = \tau_{Flansch} \cdot t$ (Schubfluß gleich Schubspannung mal Dicke des Flansches)

$$Q_z \cdot y_M = \underbrace{T_{Flansch} \cdot b \cdot \frac{1}{2}}_{\substack{\text{Resultierende aus}\\ \text{Dreiecksfläche der Schubspannung}\\ \text{(siehe Abbildung oben)}}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Hebelarm}} = R_{Flansch} \cdot h \quad \Rightarrow \quad y_M = \frac{R_{Flansch} \cdot h}{Q_z}$$

τ_0 am Flanschende bei s=a, Koordinatensystem laut Skizze:

$$\tau_0 := \frac{3}{8} \frac{a^2 \cdot t}{a^3 \cdot t^2} \cdot Q = \frac{3}{8} \frac{Q}{a\, t}$$

$$y_M := \frac{\left(\tau_0 \cdot t\right) \cdot a}{2} \cdot \frac{2\, a}{Q} = \frac{3}{8}\, a$$

bezogen auf den Abstand M-O, bezogen auf den Abstand zum Schwerpunkt M-S kommt noch a/4 dazu

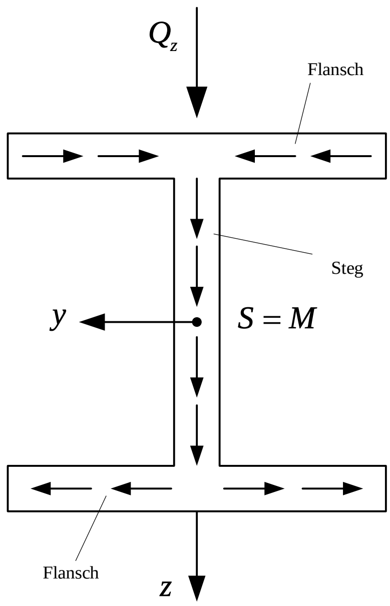
Schubmittelpunkt (alternativer Ansatz mit Integralformel aus Vorlesung)

$$x_T := \frac{1}{I_x} \int_0^{smax} S_x(s) \cdot r \, \mathrm{d}s \quad \textit{mit} \quad r = \textit{Hebelarm zur Laufvariablen s, bereichsweise integriert:}$$

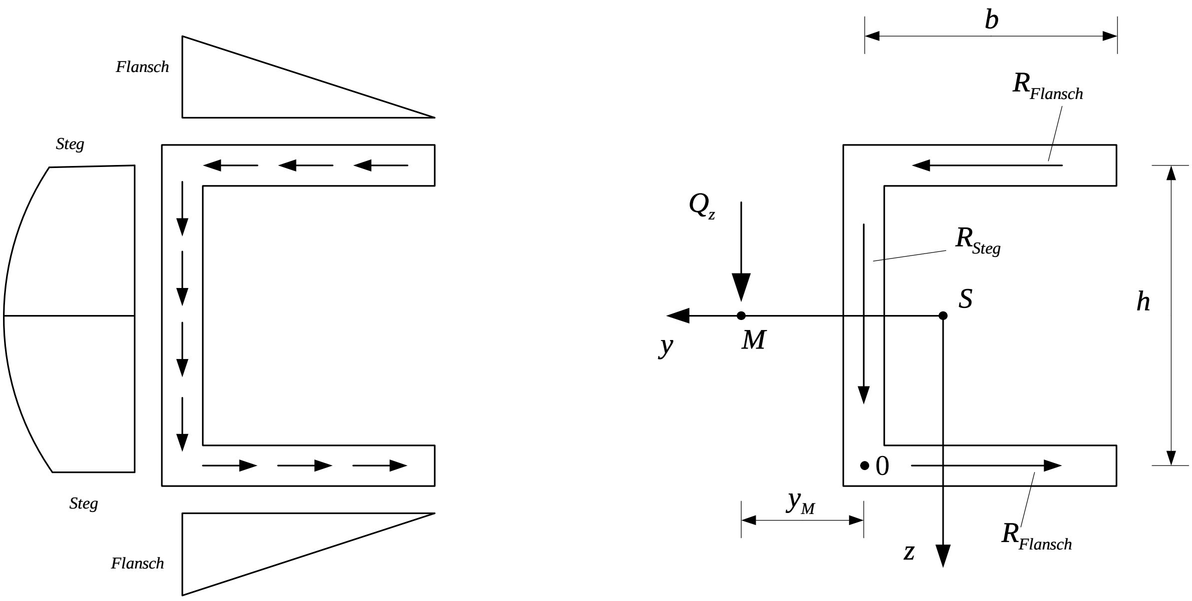
$$x_T := \frac{1}{I_x} \left(\int_0^a (a \cdot t \cdot s) \cdot a \, \mathrm{d}s + \int_a^{3a} \left(\frac{t}{2} \cdot \left(4 \cdot a \cdot s - s^2 - a^2\right) \right) \cdot \left(\frac{a}{4} \right) \mathrm{d}s + \int_{3a}^{4a} \left(a \cdot t \cdot (4 \cdot a - s)\right) \cdot a \, \mathrm{d}s \right) = \frac{5}{8}\, a$$

Bestimmung des Schubmittelpunktes

Definition des Schubmittelpunktes: Der Schubmittelpunkt M ist der Punkt eines Querschnitts, durch den die Wirkungslinie der Querkraft verlaufen muss, damit keine Torsionsbeanspruchung auftritt, der Querschnitt sich also nicht verdreht.



In der obigen Abbildung ist der Schubspannungsverlauf eines I-Profils infolge Querkraft Q_z dargestellt. Aus Symmetriegründen heben sich die horizontalen Schubkräfte in den Flanschen auf. Die über die Stegfläche aufsummierten Schubkräfte sind gleich der Querkraft Q_z. Der Querschnitt ist doppelt-symmetrisch, Schubmittelpunkt M und Schwerpunkt S fallen zusammen.



Anders bei unsymmetrischen oder einfachsymmetrischen Profilen, hier sind Schubmittelpunkt und Schwerpunkt zwei unterschiedliche Punkte.

Am Beispiel des dargestellten Profils erkennt man, dass hier die aufsummierten Schubkräfte infolge Q_z in den Flanschen ein Kräftepaar erzeugen. Da die statische Wirkung der

Schubspannungen der Wirkung der Querkraft äquivalent ist, muss das auf einen beliebigen Punkt bezogenen Moment der Schubspannung gleich dem Moment der Querkraft sein; ebenso entspricht die Querkraft der Resultierenden aller Schubspannungen.

Bildet man das Moment der Querkraft Q_z und das Moment der aufsummierten Schubspannungen um den Punkt 0 folgt mit $T_{Flansch} = {}_{Flansch} \cdot t$ (Schubfluß gleich Schubspannung mal Dicke des Flansches)

$$Q_z \cdot y_M = \underbrace{T_{Flansch} \cdot b \cdot \frac{1}{2}}_{\substack{\text{Resultierende aus} \\ \text{Dreiecksfläche der Schubspannung} \\ \text{(siehe Abbildung oben)}}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Hebelarm}} = R_{Flansch} \cdot h \quad \Rightarrow \quad y_M = \frac{R_{Flansch} \cdot h}{Q_z}$$

Aus dieser Bedingung kann der Angriffspunkt der Querkraft Q_z bestimmt werden. Man bezeichnet ihn als Schubmittelpunkt M.
Um die Torsionsbeanspruchung eines Trägers zu vermeiden, müssen die äußeren Lasten im Schubmittelpunkt M angreifen.

Für den Fall das die Schubspannungen keinen linearen Verlauf aufweisen, sondern einen parabolischen, bestimmt man sich die Resultierende mittels Integration.

Allgemein gilt somit:

$$Q_z \cdot y_M = \int_s \underbrace{T(s) \cdot ds}_{\text{Resultierende}} \cdot \underbrace{r}_{\text{Hebelarm}}$$

mit

$$T(s) = \frac{Q_z \cdot S_y(s)}{I_y}.$$

<u>Zusammenfassung:</u>

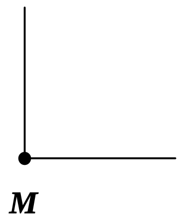
Der **Schubmittelpunkt** eines Profils ist derjenige Punkt, durch den die Wirkungslinie der Querkraft verlaufen muß, damit der Querschnitt torsionsfrei bleibt.

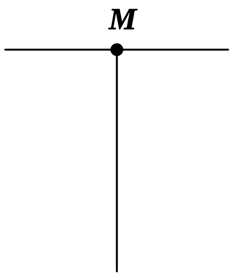
Bei symmetrischen Querschnitten liegt der Schubmittelpunkt auf der Symmetrieachse und fällt bei doppelt-symmetrischen Querschnitten mit dem Schwerpunkt zusammen.

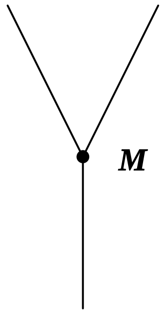
Beispiele zum Schubmittelpunkt

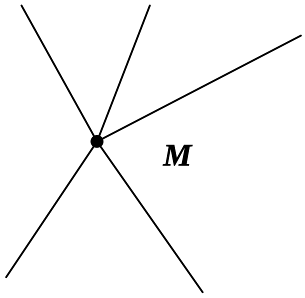
1.) Sternförmige Querschnitte

- Schubmittelpunkt = Schnittpunkt



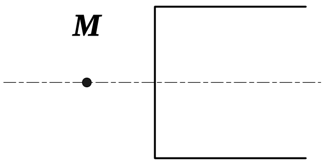


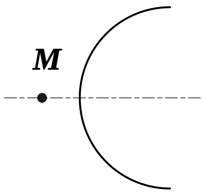


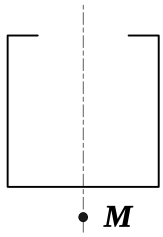


2.) Symmetrische Querschnitte

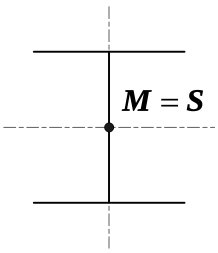
- Einfache Symmetrie
  Schubmittelpunkt liegt auf der Symmetrieachse

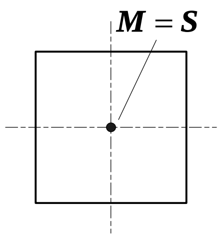


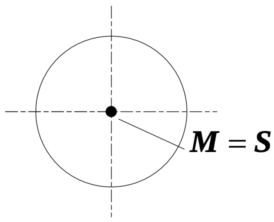




- Doppelte Symmetrie
  Schubmittelpunkt = Schwerpunkt







Man beachte: